

УДК 550.347.097.33

## ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРОВ И КОГЕРЕНТНОСТЕЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОСТИ ОТКЛИКА ГРУНТА

© 2006 г. О. В. Павленко

Представлено академиком А.С. Алексеевым 05.05.2005 г.

Поступило 24.05.2005 г.

Как известно, спектры и когерентности высоких порядков (выше второго; спектр мощности – спектр второго порядка) используются для обнаружения фазовосвязанных колебаний в стационарных временных сериях; когерентности высоких порядков (КВП) служат мерой фазовой связи [1]. Функции КВП определяются как спектры высоких порядков (СВП), нормированные на спектры мощности. В практических приложениях чаще используются КВП, в основном, бикогерентности: строятся оценки бикогерентности для временных серий и сравниваются с ожидаемыми средними в случаях, когда истинные значения бикогерентности равны нулю (например, для гауссовского шума). Повышенные значения бикогерентности сигнала на выходе какой-либо системы свидетельствуют о наличии в сигнале спектральных компонент с квадратичной связью по фазе, что может быть вызвано действием квадратичной нелинейности системы.

В геофизике СВП и КВП пока не получили широкого применения. Биспектральный анализ использовался для изучения нелинейных эффектов в низкочастотных океанических волнах [2]. В [3] исследован вопрос о наличии нелинейно-связанных компонент в сейсмическом шуме и кода-волнах и сделан вывод, что в пределах погрешностей вычислений полученные оценки бикогерентности говорят о линейности сейсмического шума и высоком содержании нелинейно-связанных компонент в кода-волнах, что однако объясняется не нелинейными эффектами, а нестационарностью кода-волн. В [4] биспектральный анализ применен для исследования тонкой структуры свободных колебаний Земли, возбужденных Чилийским и Аляскинским землетрясениями; полученные результаты свидетельствуют о фазовой связи различных низкочастотных мод колебаний. В [5] методами биспектрального анализа установлен

связь приливов и случайных локальных вариаций уровня моря.

С появлением мощных компьютеров возможности использования математического аппарата СВП и КВП для анализа стационарных временных серий расширились. В [6] для повышения точности оценки бикогерентности строили по записям большой длины. Сравнивалась бикогерентность сейсмического шума, зарегистрированного на скальных породах и на мягком грунте, и в пределах ошибок вычислений различий, связанных с нелинейностью отклика мягких грунтов, не обнаружено. Повышенные значения бикогерентности получены на частотах техногенных гармоник. Это говорит о том, что промышленные источники излучают колебания не только на основной частоте, но и на ее высших гармониках и эти частоты всегда связаны по фазе, поскольку излучаются одним источником. Следовательно, СВП и КВП могут также использоваться для выделения во временных сериях колебаний, связанных с одним источником, на частотах  $f$ ,  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$ ,  $5f$  и т.д. Поскольку СВП и КВП обладают свойствами подавления шумов (так как “полезный сигнал” представляет собой негауссовский процесс, а аддитивный шум близок к гауссовскому процессу, для которого все СВП и КВП тождественно равны нулю), их можно использовать для обнаружения даже слабых по амплитуде высших гармоник основной частоты на фоне шумов.

Полученные оценки бикогерентности сейсмического шума не подтверждают присутствия в нем нелинейных компонент, связанных с квадратичной нелинейностью среды. В [7] показано, что грунты обладают преимущественно нелинейностями нечетных типов, следовательно, для обнаружения нелинейно-связанных компонент в сейсмическом шуме прежде всего нужно исследовать трикогерентность (когерентность 4-го порядка) и когерентность 6-го порядка.

В настоящей работе исследуются бикогерентность, трикогерентность, когерентности 5-го и 6-го

порядков шумовых и монохроматических сигналов численных экспериментов, прошедших нелинейную среду – горизонтально-слоистую грунтовую толщу. Показана возможность применения КВП для исследования нелинейности отклика грунта.

При условии спектральной однородности нелинейных преобразований (что обычно выполняется) диагональные значения СВП и КВП дают представление о значениях СВП и КВП в других спектральных областях, что позволяет во многих случаях без существенных потерь информации вместо многомерных СВП и КВП использовать более наглядное представление одномерных СВП и КВП. Одномерные диагональные ( $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_{N-1} = \omega$ ) значения когерентностей 4-го, 5-го и 6-го порядков строятся по аналогии с бикогерентностью  $r_3^2(\omega_1, \omega_2)$ :

$$r_3^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{|C_3(\omega_1, \omega_2)|^2}{C_2(\omega_1)C_2(\omega_2)C_2(\omega_1 + \omega_2)}.$$

Трикогерентность рассчитывается по формуле

$$r_4^2(\omega) = \frac{|C_4(\omega)|^2}{C_2^3(\omega)C_2(3\omega)},$$

когерентность 5-го порядка – по формуле

$$r_5^2(\omega) = \frac{|C_5(\omega)|^2}{C_2^4(\omega)C_2(4\omega)},$$

когерентность 6-го порядка – по формуле

$$r_6^2(\omega) = \frac{|C_6(\omega)|^2}{C_2^5(\omega)C_2(5\omega)}.$$

Для оценивания КВП исследуемая стационарная временная последовательность  $\{x_k\}$  разбивается на  $p$  равных неперекрывающихся интервалов, по которым рассчитываются КВП и проводится усреднение. Оценки становятся гладкими при достаточно больших  $p$  [1, 3]. В [3] показано, что ожидаемое среднее значение бикогерентности  $\frac{1}{p}$ ; при больших  $p$  квадрат модуля бикогерентности имеет приблизительно  $\chi^2$ -распределение с двумя степенями свободы, и 95%-ный доверительный интервал приблизительно равен  $3/p$ . Поскольку КВП построены по аналогии с бикогерентностью, нетрудно показать, что квадраты модулей трикогерентности, когерентностей 5-го и 6-го порядков также имеют  $\chi^2$ -распределение с двумя степенями свободы и среднее значение для

диагональных членов  $\frac{(N-1)!}{p}$ , где  $N$  – порядок когерентности, а множитель  $(N-1)!$  появляется вследствие свойств симметрии КВП. Для гауссов-

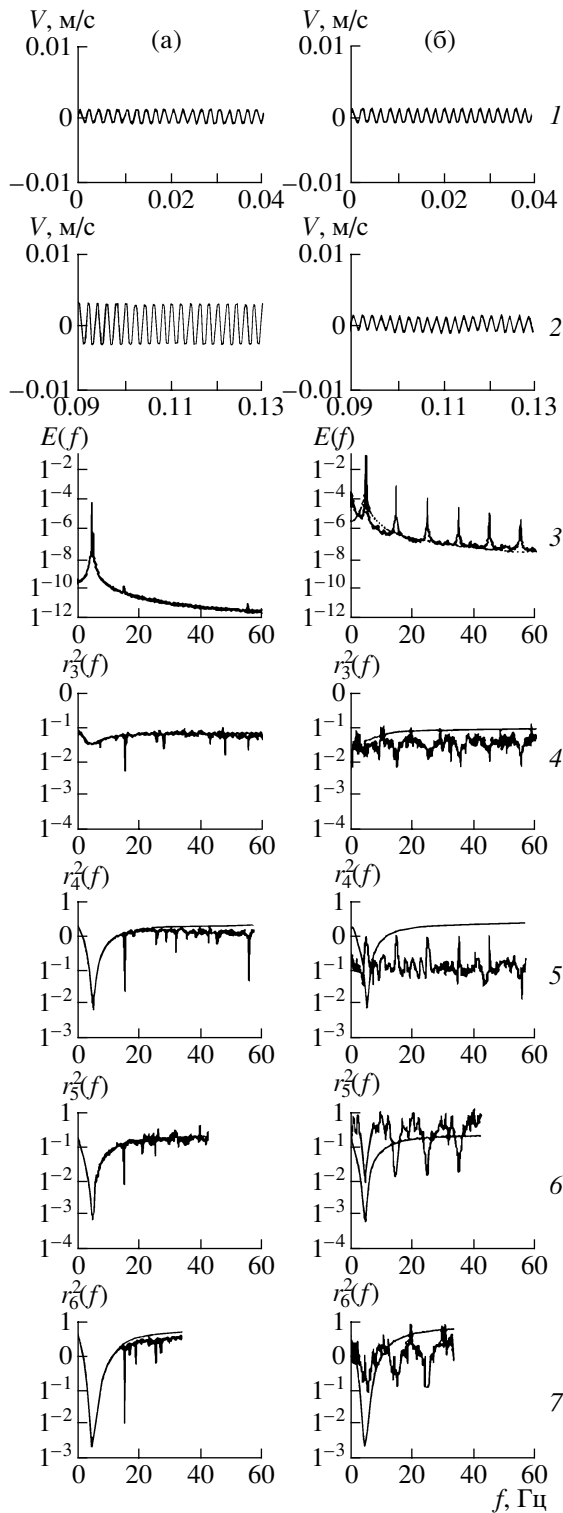
ского процесса, прошедшего нелинейную систему и обогатившегося комбинационными гармониками, средние значения модулей КВП будут выше, чем  $\frac{(N-1)!}{p}$ . Повышенные значения три-

когерентности (когерентностей 5-го или 6-го порядков) будут свидетельствовать о наличии в системе кубической нелинейности (нелинейностей 4-го или 5-го порядков) и дадут их количественные оценки. Таким образом, оценивая КВП выходных сигналов, можно определить типы и получить количественные оценки нелинейности системы.

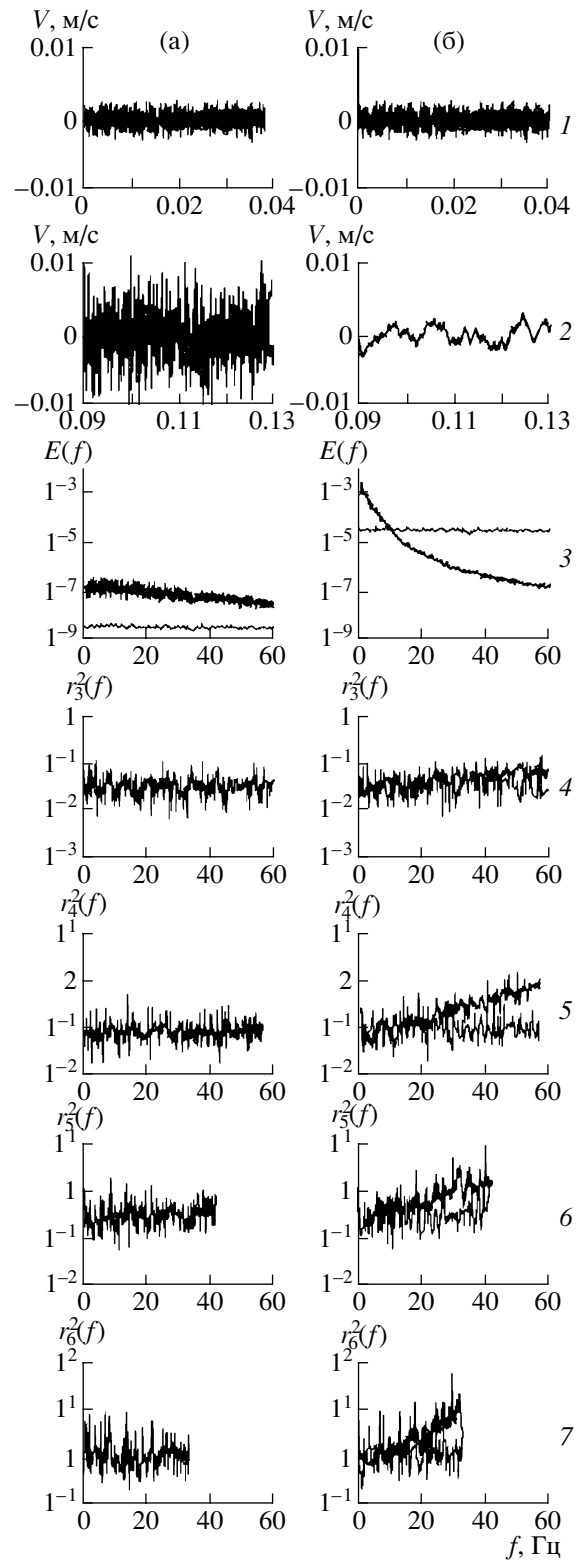
Исследованы КВП монохроматических и шумовых сигналов на выходе горизонтально-слоистой толщи осадочных аллювиальных пород мощностью 200 м (ниже залегает кристаллический фундамент) без сейсмических границ, без грунтовых вод, с постоянной по глубине плотностью 2.05 г/см<sup>3</sup> и с плавным нарастанием скоростей S-волн и максимальных сдвиговых напряжений  $\tau_{\max}$  с глубиной. Предварительно рассчитывалось распространение падающих вертикально снизу (одномерное приближение) сейсмических волн в описанном грунтовом профиле (классическая задача инженерной сейсмологии) по программе автора, использующей алгоритм, подробно описанный в работе [11], в которой также описан изучаемый грунтовый профиль.

Рассмотрены два случая: входной сигнал (1) монохроматический, (2) гауссовский шум в широкой полосе частот (~0.1–170 Гц). На рис. 1 и 2 показаны формы входных (1) и соответствующих выходных (2) сигналов для двух различных значений интенсивности входного сигнала, спектры входных и выходных сигналов (3) и диагональные значения КВП (4–7). С увеличением интенсивности входных сигналов возрастают их нелинейные искажения, приводящие к изменению амплитуд и спектрального состава колебаний на поверхности. Спектры входных сигналов показаны тонкими линиями, соответствующие спектры выходных сигналов – более жирными. Если входной сигнал монохроматический (рис. 1а), его нелинейные искажения в среде обусловлены ростом 3-й, 5-й, 7-й, ... нечетных кратных гармоник основной частоты, что указывает на нечетные типы нелинейности грунта. Для нелинейностей нечетных типов характерны также эффекты самовоздействия, в результате которых образуются гармоники исходных частот [12].

Спектры мощности и КВП входных и выходных сигналов количественно характеризуют нелинейные искажения сигналов в среде. На рисунках представлены квадраты модулей бикогерентности  $r_3^2(\omega)$  (4), трикогерентности  $r_4^2(\omega)$  (5), когерентно-



**Рис. 1.** Изменения форм, спектров и КВП гармонических сигналов с частотой 5 Гц и амплитудами 0.001 (а) и 0.1 м/с (б), прошедших грунтовую толщу. Здесь и на рис. 2: 1 – входной сигнал, 2 – отклик грунта, 3 – спектр мощности входного (тонкие линии) и выходного (жирные линии) сигналов, 4–7 – одномерные: бикогерентность  $r_3^2(\omega)$ , трикогерентность  $r_4^2(\omega)$ , когерентности 5-го  $r_5^2(\omega)$  и 6-го  $r_6^2(\omega)$  порядков входных (тонкие линии) и выходных (жирные линии) сигналов.



**Рис. 2.** Изменения форм, спектров и КВП гауссовского шума в широкой полосе частот со среднеквадратичными амплитудами  $\sqrt{\langle V^2(t) \rangle} = 0.001$  (а) и 0.1 м/с (б), прошедшего грунтовую толщу.

**Таблица 1.** Усредненные в пределах спектральной полосы значения квадратов модулей КВП колебаний на поверхности для входного сигнала – гауссовского шума

$\sqrt{\langle V^2(t) \rangle}$	$\langle r_3^2(\omega) \rangle$	$\langle r_4^2(\omega) \rangle$	$\langle r_5^2(\omega) \rangle$	$\langle r_6^2(\omega) \rangle$
0.001	0.037	0.105	0.38	1.8
0.005	0.04	0.107	0.43	1.72
0.02	0.041	0.119	0.48	2.12
0.1	0.066	0.35	0.99	4.49
$\frac{(N-1)!}{p}$	0.036	0.11	0.43	2.1

стей 5-го  $r_5^2(\omega)$  (6) и 6-го  $r_6^2(\omega)$  (7) порядков. Тонкими линиями показаны КВП входных сигналов, а более жирными – соответствующие КВП сигналов, регистрируемых на поверхности. Как видно из рис. 2б, увеличение интенсивности входного шумового сигнала приводит к возрастанию трикогерентности и когерентности 6-го порядка сигналов на поверхности. Если входной сигнал монохроматический (рис. 1), возрастание когерентностей 4-го и 6-го порядков на частоте входного сигнала (5 Гц) указывает на генерацию 3-й и 5-й кратных гармоник основной частоты 5 Гц. При больших амплитудах входных монохроматических сигналов когерентности 4-го и 6-го порядков на частоте входного сигнала близки к 1. Это означает, что между гармоникой основной частоты и ее 3-й и 5-й гармониками существует 100%-ная связь по фазе, 3-я и 5-я кратные гармоники – результат нелинейных искажений гармоники основной частоты. Отметим высокую чувствительность КВП (особенно трикогерентности и когерентности 6-го порядка) к появлению комбинационных гармоник даже при слабых проявлениях нелинейности (рис. 1а).

Если амплитуды входных сигналов достаточно велики, распространение этих сигналов в нелинейной среде сопровождается существенными нелинейными искажениями. Спектральная плотность мощности стремится преобразоваться к виду  $E(f) \sim f^{-k}$  независимо от спектрального состава входного сигнала (рис. 1б, 2б), средние значения квадратов модулей КВП приближаются к значению  $\frac{(N-1)!}{p}$ , характерному для шумовых сигналов, и превышают его. В таблице 1 приведены средние значения квадратов модулей КВП (усредненные в пределах спектральной полосы) сигналов гауссовского шума на выходе грунтового профиля при различной интенсивности входных сиг-

налов. В нижнем ряду для сравнения приведены соответствующие значения  $\frac{(N-1)!}{p}$  ( $p = 55$ ). Из приведенных в табл. 1 данных и рис. 2 видно, что при достаточно большой интенсивности входного сигнала гауссовского белого шума квадраты модулей КВП превышают значения  $\frac{(N-1)!}{p}$ , особенно на высоких частотах.

Значения КВП показывают преобладающий вклад кубической- нелинейности в отклике грунта, однако вклады нелинейностей 4-го и 5-го порядков также велики. Как известно, типы нелинейности отклика грунта определяются формами гистерезисных зависимостей напряжение–деформация в грунтовых слоях [7], и при больших интенсивностях входного сигнала функции, описывающие ветви нагружения (или разгрузки) зависимостей напряжение–деформация, можно представить в виде сравнимых по амплитудам четной и нечетной функций, что и определяет присутствие четных и нечетных нелинейных компонент в отклике грунта. При малых интенсивностях входного сигнала зависимости напряжение–деформация представляют собой преимущественно нечетные функции, и в отклике грунта преобладают нелинейные компоненты нечетных типов.

Из рис. 2 видно, что чувствительность КВП к слабым проявлениям нелинейности отклика грунта в случае шумовых сигналов невысока, и, очевидно, обнаружить нелинейные компоненты в реальном сейсмическом шуме непросто. КВП в принципе позволяют это сделать, однако для обнаружения и количественного оценивания нелинейных компонент в сейсмическом шуме необходимо: 1) выбирать для анализа стационарные записи большой длительности; 2) оценивать не только бикогерентность, но и другие КВП: трикогерентность, когерентности 5-го и 6-го порядков; 3) анализировать ряд параметров: квадраты модулей КВП, их средние в спектральной полосе значения и средние в области высоких частот, число значений, превышающих 95%-ный и 99%-ный доверительные интервалы, отклонения распределений квадратов модулей КВП от  $\chi^2$ -распределения и другие параметры.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikias C.L., Raghuveer M.R. // IEEE. 1987. V. 75. P. 869–891.
2. Hasselman K., Munk W., MacDonald G. Time Series Analysis. N.Y.: Wiley, 1963. 130 p.
3. Haubrich R.A. // J. Geophys. Res. 1965. V. 70. P. 1415–1427.
4. Zadro M.B., Caputo M. // Nuovo cim. Suppl. 1968. V. 6. P. 67–81.

5. *Cartwright D.E.* // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1968. V. 263. P. 1–55.
6. *Гущин В.В., Павленко О.В.* // *Вулканология и сейсмология.* 1998. № 4/5. С. 162–177.
7. *Павленко О.В.* // *ДАН.* 2003. Т. 389. № 2. С. 247–251.
8. *Marmarelis P.Z., Marmarelis V.Z.* *Analysis of Physiological Systems. The White-Noise Approach.* N.Y.; L.: Plenum Press, 1978. 470 p.
9. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978. 283 с.
10. *Hardin B.O., Drnevich V.P.* // *J> Soil Mech. and Found. Div. Proc. Amer. Soc. Civil eng.* 1972. V. 98. P. 603–624.
11. *Joyner W.B., Chen T.F.* // *Bull. Seism. Soc. Amer.* 1975. V. 65. P. 1315–1336.
12. *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* *Теория волн.* М.: Наука, 1979. 384 с.